DIZIONARIO DI LOGICA MATEMATICA

Saggio presentato al Congresso dei Professori italiani. Livorno, Agosto 1901.

In questo Dizionario hanno posto i termini generali che incontransi nelle pubblicazioni matematiche. Sono esclusi cioè i termini proprii dell'Aritmetica, della Geometria e delle altre parti della Matematica.

I termini sono accompagnati dalla loro etimologia e da spiegazioni o esempi intorno al loro valore, o ai loro valori, e dalla loro trasformazione nei simboli usati nel « Formulaire de Mathématiques » (*) quando la cosa è possibile. Questi termini non sono però accompagnati da una vera definizione, perchè l'esame di quali si possono definire e quali no, richiederebbe tutta la Logica simbolica.

Per rappresentare una stessa idea sono in uso, e sono raccolti in questo dizionario, più termini stati introdotti in secoli diversi. Dal loro confronto il lettore potrà dedurne la scelta migliore.

(*) Abbreviato in Formul. Qui si citerà l'edizione dell'a. 1901, Paris, Carré et Naud.

Addizione logica. Vedi « Somma logica ».

Analisi, ἀνά-λυ-σις = so-lu-zione. Opposto a « sintesi ».

Al testo di Euclide, libro 13, secondo Heiberg t.4 p.364, furono dggiunte da qualche commentatore le definizioni di analisi e sintesi, ma poco chiare. La prima, come sta scritta, enuncia una forma errata.

In Archimede, *Della Sfera* libro 2 prop. 4,. l'analisi del problema consta nel porre il problema in equazione, e nella sua risoluzione. La sintesi ne è una specie di verifica o prova.

Vedi pure Pappo libro 7.

Il ragionamento analitico consta d'una serie di sillogismi della forma $b \supset c \,.\, a \supset b \,.\supset.\, a \supset c$.

Invece nel ragionamento sintetico i sillogismi hanno la forma $a \supset b \,.\, b \supset c \,.\supset.\, a \supset c$.

Appartenere = essere parte (vedi).

Arbitrio. « Presi ad arbitrio due numeri a e b » vale quanto « Se a e b sono numeri ». Vedi essere.

Articolo. Termine grammaticale.

Diversamente unito al verbo « essere » (vedi) gli dà i valori ε, $=$, $\supset$.

Assioma = ἀξίωμα da ἄξιος = degno. Vale « proposizione primitiva » indicata nel Formul. con Pp.

Alcuni A. fanno differenza fra assioma e postulato, a seconda del grado di evidenza.

Associativa. Essendo x,y degli individui d'una classe, sia xay un individuo della stessa classe. Il segno a indica un'operazione. Quest'operazione dicesi « associativa » se qualunque siano x,y,z nella classe, si ha: $(xay)az = xa(yaz)$.

Sono associative le operazioni aritmetiche $+$ e $\times$, e le logiche $\cap$ e $\cup$.

Assurdo da «absurdus = che suona male».
(la condizione p_x è in x assurda) = (non esistono degli x che soddisfaceiano alla condizione p_x) = $(-\exists\, x \ni p_x)$.
Generalmente la condizione p_x è l'affermazione simultanea di più condizioni, e allora dire «il sistema è assurdo» vale quanto «le condizioni sono contradditorie».

Astrazione. Dicesi in logica matematica «definizione per astrazione» la definizione d'una funzione φx, avente la forma:
$\varphi x = \varphi y . = .$ (espressione composta coi segni precedenti),
cioè non si definisce il segno isolato φx, ma solo l'uguaglianza $\varphi x = \varphi y$.

Avere si trasforma in «essere». Es. «Se si *hanno* due numeri a e b» vale «Siano a e b dei numeri».
(4 e 6 *hanno* per massimo comune divisore 2) = $[\, 2 = \mathrm{D}(4,6) \,]$.

Campo = classe.

Classe = classis, idea primitiva, indicata col simbolo Cls.

Coesistere. (Le condizioni d'un sistema coesistono) = (il sistema non è assurdo).

Coincidere vale «essere eguale».

Commutativa. Sia $x\alpha y$ una funzione di x e di y. Si dice che l'operazione α è commutativa se $x\alpha y = y\alpha x$.
Sono commutative le operazioni logiche $\cap$ e $\cup$, e le aritmetiche $+$ e $\times$.
Dicesi poi che due operazioni f e g a eseguirsi su una sola variabile x sono commutabili fra loro quando $f(gx) = g(fx)$.
In analisi sonvi numerose coppie di funzioni commutabili.

Comune. (Classe comune alle classi a e b) = $b \cap a$. prodotto logico

Comunque = ad arbitrio (vedi).

Conclusione = Tesi (vedi).

Condizione = proposizione contenente variabili. (= relazione
Se a è una classe, la proposizione «x è un a» in simboli «$x \varepsilon a$», è una condizione in x.
Viceversa se p_x è una condizione in x, si può considerare la «classe degli x soddisfacenti alla condizione p_x» indicata col simbolo «$x \ni p_x$», che si legge «x tale che p_x». Si ha

$$x \ni (x \varepsilon a) = a \qquad x \varepsilon (x \ni p_x) = p_x .$$

Quindi data una classe, risulta determinata una condizione, e viceversa. Sicchè i termini «classe» e «condizione» esprimono la stessa idea sotto due aspetti diversi. Nel Formul. si usa il solo simbolo Cls.

Conseguenza. (La proposizione p è conseguenza della q) = $(q \supset p)$.

Contradditorio, Contrario. In logica scolastica il contradditorio del giudizio (proposizione) $a \supset b$ è $-(a \supset b)$, e il contrario è $a \supset -b$.
In matematica più proposizioni condizionali diconsi contradditorie, se il loro prodotto logico è assurdo (vedi).

Conversione. Regola di logica scolastica, per cui
dalla proposizione «qualche a è b» si passa alla «qualche b è a»
e dalla «nessun a è b» si passa alla «nessun b è a».

Siccome in logica simbolica queste proposizioni si serivono $\exists a \frown b$, e $-\exists a \frown b$, la conversione è una forma della regola di logica simbolica, detta « commutatività del prodotto logico ».

La conversione ora considerata dicesi pure « conversione semplice ».

Si converte la proposizione « ogni a è b » in « qualche b è a »; e questa operazione dicesi « conversione parziale, o per accidente ».

Si noti però che in questo caso la proposizione « ogni a è b » non significa $a \supset b$, ma bensì « $a \supset b \,.\, \exists a$ ». [Condizione dell'esistenza della classe a. - Ladd]

Corollario da corona, corolla, corollarium = appendice. Così Boezio tradusse il greco πόρισμα = conseguenza immediata d'un teorema.

Corrispondenza. Lo stesso che funzione, e si indica con f.

Dare, si trasforma in « essere ». « Siano dati due numeri a e b » vale « siano a e b dei numeri ».

Deduzione. Se p e q sono proposizioni, la proposizione « da p si deduce q » chiamasi deduzione, e si indica con « $p \supset q$ ».

Se a e b sono classi, $a \supset b$ si suol leggere « ogni a è b »; e vale quanto « dall'essere a si deduce essere b ».

La deduzione si esprime nel linguaggio ordinario sotto più forme.

Vedasi condizione, necessario, sufficiente, conseguenza, ...

Definizione abbreviato in Def. Nel Formul. è un'eguaglianza il cui primo membro è il segno nuovo che si definisce, ed il secondo un gruppo noto di segni. Es. (Numero primo) = (Numero divisibile solo per sè stesso, e per l'unità).

Alcuna volta si definisce un'espressione contenente lettere variabili; e la definizione è preceduta da un'ipotesi. Es.

(Essendo a e b delle frazioni) $.\supset.$ $a+b$ = (espressione composta con a e b e coi segni delle operazioni aritmetiche sui numeri interi).

« Definizione possibile » è un'eguaglianza che, per un possibile ordinamento della scienza, può essere assunta come definizione.

Data una P, si riconosce facilmente se essa sia una definizione possibile. Diventa o no una Def, a seconda della teoria e dell'arbitrio dell'autore.

Il segno = d'una definizione suol leggersi « dicesi, chiamasi, indica ».

Dimostrazione. Una dimostrazione ha in generale per scopo di persuaderci della verità d'una proposizione.

Alcune volte la dimostrazione d'un sistema di proposizioni già chiare, o verificabili coll'esperienza, ha per scopo di analizzarne le mutue relazioni, e di scoprire le proposizioni primitive che esse contengono.

Le dimostrazioni sono fatte quasi sempre colla sola logica naturale.

Furono però date delle dimostrazioni in cui si ottiene una proposizione dalle precedenti con una serie di trasformazioni logiche.

Diverso = differente = (non eguale) = $(-\iota)$

Distributiva. Dicesi che l'operazione α é distributiva rispetto alla β se $x\alpha(y\beta z) = (x\alpha y)\beta(x\alpha z)$, e si indica con Distrib(α,β).

Sussistono le proprietà aritmetiche Distrib$(\times, +)$, Distrib$(\uparrow, \times)$, Distrib(lim, $+$), Distrib(lim, $\times$), ecc.

e le logiche Distrib $(\varepsilon,\frown)$, $(\frown,\frown)$, $(\supset,\frown)$, $(\frown,\smile)$, $(\smile,\frown)$, e molte altre.

E, latino et. In generale indica il prodotto $\frown$.

(I numeri multipli di 2 *e* di 3 sono multipli di 6) $=$ ($2N \frown 3N \supset 6N$).

(I multipli di 6 sono multipli di 2 *e* multipli di 3) $=$ ($6N \supset 2N \frown 3N$).

Qualche volta significa $\smile$. Es.

(I multipli di 4 *e* i multipli di 6 sono multipli di 2) $=$ ($4N \smile 6N \supset 2N$).

Eguale. « È eguale » o « eguaglia » si indica col simbolo $=$.

La parola « eguale » quando si presenta sola, è indicata nel Formul. con ι (iniziale di ἴσος). Sicchè $\varepsilon\iota$ vale quanto $=$.

In logica matemetica si ha una sola specie di eguaglianza, detta anche identità o coincidenza. Un'eguaglianza-identità della forma $\varphi x = \varphi y$ qualcqe volta ii considera come una specie d'eguaglanza fra x e y, e si indica cen nomi speciali.

Eguaglianza è una scrittura della forma $x = y$.

x dicesi il primo membro, y il secondo dell'eguaglianza.

Equazione è la forma latina di « eguaglianza ». Vedi identità.

Equipollenza. Altra forma di eguaglianza, usata da Bellavitis pei vettori. Dopo i lavori di Grassmann e di Hamilton, si indica semplicemente col segno $=$.

Equivalenza. Altra forma di eguaglianza. « Le condizioni p e q sono equivalenti » vale « $p = q$ ».

« Il solido a è equivalente al solido b » vale « Volume di a $=$ volume di b ».

Elemento. Classe contenente un solo individuo. [semplice]

(La classe a è un elemento) $= [\exists a : x, y \varepsilon a . \supset_{x,y} . x = y]$.

Esistere. Si indica con $\exists$.

Essere. A seconda dei casi ha i valori $\varepsilon, =, \supset, \exists$.

Es. (7 *è un* numero primo) $=$ ($7 \varepsilon Np$)

(13 *è la* somma di due quadrati) $=$ ($13 \varepsilon N^2 + N^2$)

(5 e 7 *sono* numeri primi) $=$ ($5,7 \varepsilon Np$)

(*Tutti* i multipli di 4 *sono* multipli di 2) $=$ ($4N \supset 2N$)

(*Ogni* multiplo di 4 *è* multiplo di 2) $=$ »

(*L'*uomo *è* mortale) $=$ (uomo $\supset$ mortale)

(13 *è la* somma di 4 e 9) $=$ ($13 = 4 + 9$)

(*Sia* a un numero primo; si ha...) $=$ ($a \varepsilon Np . \supset . ...$)

(*Essendo* » » ») » » »

(*Sonvi* quadrati somme di due quadrati) $= [\exists N^2 \frown (N^2 + N^2)]$

Fissare si trasforma in « essere ».

(Fissati due numeri a e b) $=$ (Essendo a e b due numeri).

Funzione. Siano a e b delle classi. Con bfa, che si legge « b funzione degli a » si intende ogni segno che premesso ad un individuo della classe a dà per risultato un b. Es. log ε qfQ « logaritmo è il segno d'una funzione reale di variabile positiva ».

Alcune volte il segno di funzione si scrive dopo la variabile, o si unisce diversamente.

Le funzioni d'una coppia di variabili si indicano spesso scrivendo il segno di funzione fra le due variabili. Es. $a+b$, $a-b$,...

Invece di « funzione » dicesi anche « operazione » o « corrispondenza ».

Generale o universale dicesi una proposizione, o giudizio, della forma $a \supset b$, ovvero $a{-}b = \Lambda$, o sostituendo b a $-b$, $ab = \Lambda$.

Giudizio *particolare* è la negazione d'un giudizio universale, cioè della forma $\exists\, a \frown b$.

Una proposizione A dicesi qualche volta *più generale* della B, e la B caso particolare di A, se aggiungendo alla ipotesi di A una nuova ipotesi, si deduce la B.

Per es. se nella prop. $a,b \varepsilon N \,.\supset.\, (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ aggiungo all'ipotesi la condizione $b = 1$, e semplifico, ho il caso particolare $a \varepsilon N \,.\supset.\, (a+1)^2 = a^2+2a+1$.

« In generale » alcuna volta significa « sempre » ed è un pleonasmo. Altre volte dire che una proposizione « è vera in generale » significa che ha dei casi di eccezione, ossia che non è vera.

Gruppo, alcune volte significa Classe, in simboli Cls.

Gruppo di funzioni, o operazioni = classe di operazioni, tale che il prodotto funzionale di due individui di essa appartenga alla classe stessa. $a \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset.$ (Gruppo di operazioni in a) $=$
$\mathrm{Cls}'(a\mathrm{F}a) \frown u \ni (x,y \varepsilon u \,.\supset_{x,y}.\, xy \varepsilon u)$

Sottogruppo. Essendo a un gruppo, nel primo o secondo significato, la frase « b è un sottogruppo di a » significa $b \supset a$.

Identità. « Gli oggetti x ed y sono identici » vale « $x = y$ ».

Una proposizione p_x contenente la variabile, o sistema di variabili, x, è un'identità, o è identicamente vera, qualunque sia x in un campo a » significa « comunque si prenda x nel campo a, si ha p_x » ; in simboli $x \varepsilon a \,.\supset_x .\, p_x$. Es. $x,y \varepsilon N \,.\supset.\, x+y = y+x$.

Alcuni A. chiamano identità un'eguaglianza della forma $x = x$.

Altri chiamano identità l'eguaglianza fra due espressioni, vera per tutti i valori delle lettere. Allora $x+y = y+x$ non è un'identità, perchè non è vera se x e y sono vettori sferici.

Equazione è un'eguaglianza contenente una variabile x, che sta per essere accompagnata dal segno $x\ni$. Sicchè un'eguaglianza si chiama equazione o identità, a seconda della sua posizione nell'enunciato, precisamente come un numero si chiama « termine » o « fattore a seconda della sua posizione in una formola.

Ideografia, in tedesco « Begriffschrift ». Scrittura in cui ogni idea è rappresentata con un segno. Sono ideografie più o meno complete la scrittura geroglifica degli antichi egiziani, come pure la cinese attuale Ideografie parziali sono costituite dalle cifre dette arabiche, dai simboli della chimica, dai segni algebrici, ecc. L'ideografia completa, o pasigrafia, fu intravvista da Leibniz, col nome di « characteristica », che ne pose le fondamenta in scritti parzialmenle da lui pubblicati, e che ora si vanno pubblicando. Vedasi specialmente :

L. Couturat — *La logique de Leibniz d'après des documents inédits*, Paris a. 1901 pag. 604.

L'unione dei simboli di logica cogli algebrici permise di esprimere completamente in simboli molte parti della matematica.

Indipendente. (Due classi a e b sono indipendenti) = ($\exists a$-b . $\exists b$-a).

Due condizioni p_x e q_x contenenti la variabile x sono indipendenti, quando lo sono le classi $x \ni p_x$ e $x \ni q_x$.

Due postulati, o proposizioni primitive sono indipendenti, se considerando i segni che rappresentano idee primitive come variabili, esse sono in questi segni condizioni indipendenti.

Si prova l'indipendenza d'un sistema di n proposizioni primitive, portando n esempi o interpretazioni dei segni primitivi, che soddisfano a tutte le combinazioni a n—1 delle Pp e non alla eccettuata.

Insieme è lo stesso che classe = Cls.

Inverse (legge delle). Vedi negazione.

Ipotesi da ὑπό-θε-σις = Sup-po-sizione.

Essendo p e q condizioni, nella deduzione $p \supset q$, p è l'ipotesi.

Legge associativa, commutativa, distributiva. Vedansi questi nomi.

Legge delle inverse, vedi negazione.

Lemma = λῆμμα da λαμβάνω = assumo.

In Archimede vale proposizione che si assume senza dimostrazione, cioè proposizione primitiva Pp.

Generalmente vale proposizione che si premette ad un teorema onde facilitarne la dimostrazione.

Membro d'un'eguaglianza (vedi).

Moltiplicazione logica vedi « Prodotto logico ».

Necessario. (La proposizione p è condizione necessaria della q) = ($q \supset p$).

Negazione. Si indica col segno - che si legge « non ».

Si ha: $a \varepsilon \mathrm{Cls} . \supset . --a = a$

« Trasportare », in Logica matematica, significa applicare la regola:

$$a,b \varepsilon \mathrm{Cls} . a \supset b . \supset . -b \supset -a$$

analoga a una regola algebrica.

Questa regola è anche chiamata da alcuni « legge delle inverse ». Chiamasi « proposizione inversa » di $a \supset b$ la $b \supset a$, e « contraria » della $a \supset b$ la $-a \supset -b$. Però, mentre il passaggio da una proposizione alla sua inversa o alla sua contraria è illegittimo, è solo legittimo l'accoppiamento delle due operazioni, che esprime la regola del trasportare.

Nome. Termine grammaticale.

Nome comune = Cls.

Si possono considerare in analisi come « nomi proprii » i segni 0,1,2,... e, i, π, ecc. Del resto ogni nome comune, o nome d'una classe, è il nome proprio della classe.

La differenza fra nome e aggettivo è puramente grammaticale.

Si dice « 7 è un intero » come pure « 7 è un numero intero ».

In simboli i nomi non hanno nè numeri nè casi.

Non vedi negazione.

Nulla. La classe nulla, classe non contenente individui, fu indicata con N (Nihil) da Leibniz, con 0 da Boole, con $\wedge$ nel Formul. Il suo uso

è limitatissimo. Generalmente si trasforma (la classe a è nulla) in (non esistono degli a), in simboli $(-\exists a)$.

O quando ha il valore del latino « vel » indica la somma logica $\cup$.

Quando ha il valore del latino « aut » fu chiamato « disgiunzione completa ». « a aut b » vale « $a-b \cup b-a$ ».

Ogni latino omnis. (ogni a è b) $= (a \supset b)$.

Operazione vale « funzione ».

Parte. La classe a è parte di b significa $a \supset b$.

Altre volte significa « $a \supset b \,.\, a -= b$ ».

Particolare vedi « generale ».

Possibile si esprime con $\exists$ (esistono).

(E possibile determinare, o trovare, un numero quadrato somma di due quadrati) $= [\exists\, N^2 \cap (N^2 + N^2)]$.

Postulato = λαμβανόμενον, è indicato, insieme all'assioma (vedi), con Pp.

Prendere si traduce con « essere ».

(Presi due numeri a e b) = (Siano a e b dei numeri).

Preposizione. Termine grammaticale.

Le preposizioni del linguaggio comune nella traduzione in simboli si uniscono col segno di funzione, e qualche volta sono un segno di fnnzione.

Es. (Somma di 2 *con* 3) $= 2+3$
(2 moltiplicato *per* 3) $= 2 \times 3$
(2 elevato *a* 3) $= 2^3$
(logaritmo *di* 2) $= \log 2$
(3 metri *al* secondo) $= 3\mathrm{m}/\mathrm{s}$
(3 metri *in* 2 secondi) $= 3\mathrm{m}/(2\mathrm{s})$
(3 Lire *al* metro) $= 3\mathrm{L}/\mathrm{m}$.

Problema = πρόβλημα da προβάλλω = propongo.

Enunciato d'una condizione (o complesso di condizioni) p_x.

Risolvere il problema è trasformare la classe $x \ni p_x$ in un'altra in cui la lettera x sia scomparsa. Es. $q \cap x \ni (x^2 - 3x + 2 = 0) = \iota 1 \cup \iota 2$.

Prodotto logico di due classi a e $b = a \cap b$, e rappresenta la classe comune agli a e ai b.

La moltiplicazione logica ha le proprietà

$$a \cap a = a \quad a \cap b = b \cap a \quad (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) \text{ ecc.}$$

Proprietà. Sia a una classe; l'« essere un a » suolsi chiamare una proprietà. Sicchè la differenza fra proprietà e classe è puramente grammaticale.

« a è proprietà caratteristica di b » vale « $a = b$ ».

Qualche. Essendo a e b delle classi, la proposizione particolare affermativa « qualche a è b » vale quanto « esistono degli a e b » in simboli « $\exists a \cap b$ ».

Relazione. Una relazione fra due enti è espressa da una condizione fra i due enti. Se x,y sono gli enti variabili, e $p_{x,y}$ è la condizione, risulta determinata la classe delle coppie $(x;y)$ che soddisfano a questa condizione; essa è indicata con $(x;y) \ni p_{x,y}$.

Quindi ogni relazione può essere rappresentata da una classe di coppie.

Ad es. $(x;y)\ni[x,y\varepsilon q \,.\, x^2+y^2=1]$, se identifichiamo la coppia $x;y$ di numeri reali col punto avente le stesse coordinate, rappresenta la circonferenza di centro l'origine e di raggio 1.

La condizione $p_{x,y}$ si può pure esprimere con una funzione. Pongasi $fy=x\ni(p_{x,y})$. Allora $p_{x,q}$ diventa $x\varepsilon fy$, cioè « x è un individuo della classe fy.

Scolio $=$ σχόλιον, vale nota, osservazione.

Se. Siano a e b delle proposizioni. « Se a, allora b » vale $a \supset b$.

Sempre. È un pleonasmo per rinforzare la deduzione.

Somma logica di due classi a e b è la classe formata dagli enti che appartengono o allo classe a o alla classe b. Si indica con $a \cup b$, e il segno $\cup$ si legge « o » (vedi).

Essa ha le proprietà

$$a \cup a = a \qquad a \cup b = b \cup a \qquad a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c \text{ ecc.}$$

Sufficiente. (La proposizione p è condizione sufficiente della q $=$ $(p \supset q)$.

Supposizione Forma latina di ipotesi.

Sintesi da σύνθεσις $=$ composizione. Vedi « Analisi ».

Sillogismo. È la proposizione:

$$a,b,c\varepsilon \mathrm{Cls}.\ a \supset b.\ b \supset c.\ \supset.\ a \supset c.$$

I logici scolastici considerarono più modi di sillogismi, che si trasformano fra loro colla conversione (vedi). Essi hanno poca importanza.

Sistema, qualche volta indica Cls.

Il sistema di due variabili x e y si indica con $(x;y)$ o (x,y).

Sistema di condizioni è l'affermazione simultanea o prodotto logico delle condizioni date. In Logica Matematica il prodotto di più condizioni è una condizione.

Soddisfare. (Gli x che *soddisfano* alla condizione $p_x) = (x\ni p_x)$.

Teorema $=$ Θεώρεμα, da θεωρέω $=$ considero, indica una proposizione che si dimostra.

Tesi $=$ θέσις. Nella deduzione $a \supset b$, b è la tesi.

Trasportare. Vedi « negazione ».

Tutto. La classe totale, o tutto, fu indicata in logica simbolica coi segni $1, \infty$, V. Esso ha però poca importanza, e fu escluso dal Formulario.

Verificare $=$ soddisfare (vedi).

Vero. « La proposizione A è vera » vale « A ».

G. Peano